一类非线性薛定谔方程的 Weierstrass 椭圆函数解

邱　春　艾德臻　高秀云　李开明

（西北师范大学物理与电子工程学院，甘肃　兰州　730070）

摘　要：借助于求解非线性演化方程的Weierstrass 椭圆函数解的一个新方法，求解了一类非线性薛定谔方程，得到了其准确的双周期解，在极限情况下退化为相应的孤波解.

关键词：非线性薛定谔方程；Riccati 方程求解法；Weierstrass 椭圆函数解；吴方法

中图分类号：O175.24　　文献标识码：A　　文章编号：1672－0520（2008）02－0027－03

1 引言

非线性薛定谔方程，在物理学中非线性物理学中常见，简称NLS 方程，又称立方薛定谔方程，它是描写非线性波的调制（即非线性波包）方程，我们所要求解的一类 NLS 方程其形式如下 (1)

$$i\frac{\partial u}{\partial t}+\alpha\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\beta|u|^2 u=0, \tag{1}$$

其中 $i=\sqrt{-1}$,α ,β 分别称频散系数和 Landau 系数.

近年来人们对于一般的非线性薛定谔方程求解已很多[2-6]，但本文方程的求解还未曾见，笔者则利用新的求解非线性演化方程 Weierstrass 椭圆函数解的方法 [7,8]，来求解该方程，并给出其相应结果.

2 方法简介

投影 Riccati 方程如下

$$\begin{cases}F' = pFG,\\ G' = q+pG^2-rF,\end{cases} \tag{2}$$

其中 F=F（ξ），G=G（ξ）. 且当 F（ξ），G（ξ）满足关系

$$G^2=\frac{2r}{p}F-\frac{q}{p} \tag{3}$$

时，具有如下一组 Weierstrass 椭圆函数解

$$F=\frac{q}{6r}+\frac{2}{pr}\phi\ ,\ G=\frac{12\phi'}{p^2q+12p\phi}. \tag{4}$$

当 F（ξ），G（ξ）满足关系

$$G^2=-\frac{q}{p}+\frac{2r}{p}F-\frac{24r^2}{25pq}F^2 \tag{5}$$

时，具有如下一组 Weierstrass 椭圆函数解

$$F=\frac{5q}{6r}+\frac{5pq^2}{72r\phi}\ ,\ G=-\frac{q\phi'}{12\phi^2+pq\phi}, \tag{6}$$

收稿日期：2007-06-30

作者简介：邱春(1976－)，男，江苏徐州人，在读硕士研究生，主要研究方向为量子场论及其应用.

万方数据

其中 Weierstrass 椭圆函数$\phi=\phi(\xi;g_2;g_3)$满足方程

$$\phi'^2=4\phi^3-g_2\phi-g_3, \tag{7}$$

且$g_2=\dfrac{p^2q^2}{12}, g_3=\dfrac{p^3q^3}{216}$．而新的投影Riccati 方程求解法就是以解(4)，(6) 和关系(3)，(5) 代替原有的投影 Riccati 方程求解法 [9,10] 中的解和关系所给出的方法.

3 求解 NLS 方程

令 $u=v(\xi)e^{i(kx-\omega t)}$，$\xi=k_1(x-c_1t)$, (8)

$$\frac{\partial u}{\partial t}=e^{i(kx-\omega t)}v'(-c_1k_1)+ve^{i(kx-\omega t)}(-i\omega), \tag{9}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}=e^{i(kx-\omega t)}v'k_1+ve^{i(kx-\omega t)}(ik), \tag{10}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=v''k_1^2e^{i(kx-\omega t)}+2ikk_1v'e^{i(kx-\omega t)}-k^2v\,e^{i(kx-\omega t)}. \tag{11}$$

将上述三式代入 (1) 式得

$$\alpha k_1^2v''+(\omega-\alpha k^2)v+i(2\alpha kk_1-k_1c_1)v'-\beta v^3. \tag{12}$$

令 $2\alpha kk_1=k_1c_1$，$\alpha k_1^2=X$，$\omega-ak^2=Y$，$\beta=Z$,

则原方程化为 $Xv''+Yv-Zv^3=0$. (13)

令 $v(\xi)=a_0+a_1F(\xi)+b_1G(\xi)$, (14)

则 $v'(\xi)=a_1pFG+b_1rF$. (15)

$v''(\xi)=3a_1prF^2-3a_1pqF+b_1rpFG$. (16)

将 (14)，(15)，(16) 式代入 (13) 式，并注意到 (2)，(3) 可得到

$$-Za_1^3F^3+(3a_1prX-3Za_0a_1^2-\frac{6Za_1b_1^2r}{p})F^2+(-3a_1pqX+a_1Y-3Za_0^2a_1-\frac{6Za_0b_1^2r}{p}$$
$$+\frac{3Za_1b_1^2q}{p})F+(Ya_0-Za_0^3+\frac{3Za_0b_1^2q}{p})+(b_1Y-3Za_0^2b_1+\frac{Zb_1^3q}{p})G+(b_1rpX-6Za_0a_1b_1-$$
$$\frac{2Zb_1^3r}{p})FG-3Za_1^2b_1F^2G=0, \tag{17}$$

由此得到关于 a_0，a_1，b_1 的超定方程组

$$\begin{cases}-Za_1^3=0,\\ 3a_1prX-3Za_0a_1^2-\dfrac{6Za_1b_1^2r}{p}=0,\\ -3a_1pqX+a_1Y-3Za_0^2a_1-\dfrac{6Za_0b_1^2r}{p}+\dfrac{3Za_1b_1^2q}{p}=0,\\ Ya_0-Za_0^3+\dfrac{3Za_0b_1^2q}{p}=0,\\ b_1Y-3Za_0^2b_1+\dfrac{Zb_1^3q}{p}=0,\\ b_1rpX-6Za_0a_1b_1-\dfrac{2Zb_1^3r}{p}=0,\\ -3Za_1^2b_1=0.\end{cases} \tag{18}$$

万方数据

采用吴消元法[11]解此方程组有以下情况

$$(1)\ a_0=0,\ a_1=0,\ b_1=\pm\sqrt{\frac{-Yp}{Zq}}=\pm\sqrt{\frac{-(\omega-\alpha k^2)p}{\beta q}}, \tag{19}$$

此时 $k_1=\pm\sqrt{\dfrac{2(\alpha k^2-\omega)}{\alpha pq}}$.

$$(2)\ a_1=0,\ b_1=0,\quad a_0=\pm\sqrt{\frac{Y}{Z}}=\pm\sqrt{\frac{\omega-\alpha k^2}{\beta}}, \tag{20}$$

所以方程(13)的精确双周期解如下

$$v_1(x,t)=\pm\sqrt{\frac{(\alpha k^2-\omega)p}{\beta q}}\frac{12\phi'[k_1(x-c_1t),g_2,g_3]}{p^2q+12p\phi[k_1(x-c_1t),g_2,g_3]}, \tag{21}$$

$$v_2(x,t)=\pm\sqrt{\frac{(\omega-\alpha k^2)}{\beta}}. \tag{22}$$

原NLS方程(1)的解为

$$u_1=\pm\sqrt{\frac{(\alpha k^2-\omega)p}{\beta q}}\frac{12\phi'[k_1(x-c_1t),g_2,g_3]}{p^2q+12p\phi k_1(x-c_1t),g_2,g_3]}e^{i(kx-\omega t)}, \tag{23}$$

$$u_2=\pm\sqrt{\frac{(\omega-\alpha k^2)}{\beta}}e^{i(kx-\omega t)}. \tag{24}$$

由于方程(13)的解与Jacobi椭圆函数有如下关系

$$\phi(\xi,g_2,g_3)=e_2-(e_2-e_3)cn^2(\sqrt{e_1-e_3}\xi;m), \tag{25}$$

其中 $m^2=\dfrac{e_2-e_3}{e_1-e_2}$ 为Jacobi椭圆函数的模，$e_i(i=1,2,3;e_1\ge e_2\ge e_3)$ 是方程 $4z^3-g_2z-g_3=0$ 的根，同时，当 $m\to 1$ 时，$cn(\xi,m)\to \sec h(\xi)$，$sn(\xi,m)\to\tanh(\xi)$，$dn(\xi,m)\to\tanh(\xi)$. 所以在 $m\to 1$ 的极限条件下，（21）可退化为相应的精确孤波解.

4 结语

本文用新的投影Riccati方法求解了一类特殊的非线性薛定谔方程，给出了其准确的双周期解，除此之外还给出了它的一个简单解. 至于由（5)、（6）式决定的周期解较为复杂，有待于近一步探索，在此不再详述.

参考文献：

[1] 刘式适，刘式达. 物理学中的非线性方程[M]. 北京大学出版社，2001.

[2] YAN Zhen-ya, Generalized method and its application in the higher-order nonlinear schrodinger equation in nonlinearoptical fibres.[J]. Chaos ,Solitons and Fractals.2003，16: 759~766.

[3] Gedalin M,Scott TC,B and YB,Optical Solitary waves in the higher order nonlinear schrodinger equation[J]. Phys Rev.Lett, 1997，78（3）: 448~451.

[4] LI Hua-mei,XU You-shen,LIN Ji.New optical solitons in high-order dispelrsive cubic-quintic nonlinear schrodinger equation[J].

下转第（37）页

万方数据

参考文献：

[1] 北京大学数学系．高等代数（第二版）[M]．北京：高等教育出版社，1988.

[2] 苏育才，姜翠波，张跃辉．矩阵理论（第一版）[M]．科学出版社，2006.

[3] 张禾瑞，郝炳新．高等代数（第一版）[M]．北京：高等教育出版社，1988.

On the Diagonalization of Real Anti-Symmetric Matrix

WANG Mei-yan

(Shandong Institute of Business and Technology,yantai,shandong, 264005）

Abstract: The paper gives some property of character value and character polynomial for anti-symmetric matrix, proves all matrix can be diagonalized by unitary matrix,and gives the proof of diagonalization for real anti-symmetric matrix via unitary matrix.

Key words: Real anti-symmetric matrix, Normal matrix, Unitary matrix, Diagonalization

［责任编辑：张飞羽］

上接第（29）页

Commun Theor Phys,2004，41：829~832.

[5] 龚伦训．非线性薛定谔方程的 Jacobi 椭圆函数解 [J]．物理学报，2006，55（09）：4414~4418.

[6] 吴晓飞．修正高阶非线性薛定谔方程的显式行波解 [J]．激光与红外，2005，35：785~787.

[7] 李德生，张鸿庆．构造孤子方程的 Weierstrass 椭圆函数解的一个新方法 [J]．物理学报，2005，54（12）：5540~5543.

[8] 李德生．Time dependent Ginzburg-Landau 方程的Weierstrass 椭圆函数解[J]．原子与分子物理学报，2006．23（05）：933~937.

[9] 张桂戌，李志斌，段一士．非线性波方程的精确孤立波解 [J]．中国科学（A 辑）2002，30（12）：1103~1108.

[10] FU Zhun-tao,LIU Shi-da,LIU Shi-kuo.New kinds of solutions to Gardner equation J.Chaos ,Solitons and Fractals. 2004，20: 301~309.

[11] Wu W T .Polynomial Equation-Solving and Its Application, Algorithms and Compution[M]. Berlin:Springer,1994. 1.

Weierstrass Elliptic Function Solutions to a New Type of NLS Equations

QIU Chun　AI De-zhen　GAO Xiu-yun　LI Kai-ming

（College of Physics and Electronic Engineering ,Northwest Normal University,LanZhou GanSu 730070）

Abstract: With the assistance of new method for obtaining weierstrass elliptic function solutions to nonlinear evolution equation,We obtain some new double period solutions to a type of NLS equations.The solutions can be redued to the corresponding solitary solutions under the limit condition.

Key words: NLS equation; Riccati equation method; Weierstrass elliptic function solutions; Wu's method

［责任编辑：张飞羽］

万方数据

万方数据 WANFANG DATA 文献链接

一类非线性薛定谔方程的Weierstrass椭圆函数解

作者： 邱春， 艾德臻， 高秀云， 李开明， QIU Chun， AI De-zhen， GAO Xiu-yun， LI Kai-ming
作者单位： 西北师范大学物理与电子工程学院,甘肃,兰州,730070
刊名： 河西学院学报
英文刊名： JOURNAL OF HEXI UNIVERSITY
年，卷(期)： 2008,24(2)

参考文献(11条)

1. Wu W T Polynomial Equation-Solving and Its Application,Algorithms and Compution 1994

2. 刘天适;刘式达 物理学中的非线性方程 2001

3. 张桂戌;李志斌;段一士 非线性波方程的精确孤立波解[期刊论文]-中国科学A辑 2002(12)

4. 李德生 Time dependent Ginzburg-Landau方程的weierstrass椭圆函数解[期刊论文]-原子与分子物理学报 2006(05)

5. 李德生;张鸿庆 构造孤子方程的Weierstrass椭圆函数解的一个新方法[期刊论文]-物理学报 2005(12)

6. 吴晓飞 修正高阶非线性薛定谔方程的显式行波解[期刊论文]-激光与红外 2005(10)

7. 龚伦训 非线性薛定谔方程的Jacobi椭圆函数解[期刊论文]-物理学报 2006(09)

8. LI Hua-mei;XU You-shen;LIN Ji New optical solitom in high-order dispelrsive cubic-quintic nonlinear schrodinger equation[期刊论文]-Communications in Theoretical Physics 2004(6)

9. Gedalin M;Scott TC,B Optical Solitary waves in the higher order nonlinear schrodinger equation 1997(03)

10. YAN Zhen-ya Generalized method and its application in the higher-order nonlinear schrodinger equation in nonlinearoptical fibres 2003

11. FU Zhun-tao;LIU Shi-da;LIU Shi-kuo New kinds of solutions to Gardner equation 2004

本文链接：http://d.g.wanfangdata.com.cn/Periodical_hxxyxb200802007.aspx